LUCRAREA Nr. 6

REZOLVAREA ECUAȚIILOR ŞI SISTEMELOR DE ECUAȚII ALGEBRICE

1. Scopul lucrării

Lucrarea are ca scop prezentarea, şi însuşirea de către studenți, a modului de rezolvare a ecuațiilor algebrice şi sistemelor de ecuații algebrice utilizând produsul Mathcad.

2. Noțiuni teoretice

2.1. Rezolvarea sistemelor liniare de ecuații

Pentru rezolvarea sistemelor liniare se apelează funcția **lsolve(M,v)** care determină soluția vectorului **x**, prin rezolvarea sistemului **M·x = v**. Sistemul trebuie să aibă o soluție unică.

Argumentele funcției *lsolve(M,v)* sunt:

• **M** este matrice reală sau complexă, pătratică, nesingulară;

• **v** este vector real sau complex care trebuie să aibă acelaşi număr de linii ca şi matricea M.

Fie sistemul liniar de n ecuații cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Se defineşte matricea coeficienților sistemului astfel:

$$M := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ iar vectorul termenilor liberi } v := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Se apelează funcţia **lsolve(M,v)**, urmată de semnul de evaluare a expresiei (=) şi se obţine vectorul coloană al soluţiilor sistemului.

sol:=lsolve(M,v) , rezultă:

$$\text{sol}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Utilizând facilităţile permise de utilizarea Mathcad-ului, legate de definirea vectorilor şi matricelor, se pot găsi şi alte modalităţi de rezolvare a sistemelor liniare de ecuaţii. O modalitate simplă de rezolvare se obţine dacă ecuaţia matriceală care înlocuieşte sistemul liniar de **n** ecuaţii cu **n** necunoscute, de forma:

$M \cdot x := v$,

se înmulţeşte la stânga cu inversa matricei **M**, rezultând vectorul **x** de forma:

$x := M^{-1} \cdot v$, iar după operaţia de evaluare se determină soluţiile sistemului:

$$\text{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Aplicaţie:

Să se determine soluţiile sistemului liniar de 3 ecuaţii cu 3 necunoscute:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

Se definesc:

$$\text{M} := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rezultă soluţia:

$\mathrm{X} := \mathrm{lsolve}(M, v)$, deci: $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Rezolvarea sistemelor neliniare

Pentru rezolvarea sistemelor neliniare Mathcad-ul dispune de două funcţii: **Find** şi **Minerr**. Pentru aproximarea soluției căutate este necesar să se precizeze un punct inițial (de obicei în apropierea soluției căutate) cu care va începe procesul iterativ al funcțiilor **Find** şi **Minerr**. Dacă punctul inițial nu este ales din domeniul de convergență al procesului iterativ, procesul nu va converge sau va converge către o altă soluție.

Cuvântul cheie **Given** trebuie să preceadă ecuațiile sistemului. Semnul "**=**" dintre partea stângă şi partea dreaptă a ecuațiilor se realizează prin apăsarea simultană a tastelor **[Ctrl]=** sau din instrumentul *Boolean* semnul "**=**".

Aplicaţie:

Să se rezolve sistemul neliniar:

$$x = \log\left(\frac{y}{z}\right) + 1$$

$$y = 0.4 + z^2 - 2 \cdot x^2$$

$$z = 2 + x \cdot \frac{y}{20}$$

Se va rezolva sistemul în apropierea soluției: $x := 1,\ y := 2,\ \mathrm{z}{:=}2$.

Pentru rezolvarea sistemului se scrie cuvântul rezervat **Given**, apoi ecuațiile sistemului cu semnul „*egal Boolean*". Se inserează funcția **Minerr** şi rezultă soluția:

$$\mathrm{Minerr}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1.088 \\ 2.624 \\ 2.143 \end{bmatrix}$$

2.3. Rezolvarea ecuațiilor algebrice

Forma generală a unei ecuații algebrice este următoarea:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0,$$

unde:

- **n** este gradul ecuației;
- **p(x)** este polinomul asociat, $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$,
- **a$_k$** sunt coeficienții polinomului, care pot fi numere reale sau complexe.

Rezolvarea ecuației presupune utilizarea funcției **polyroots** care determină toate rădăcinile polinomului. Pentru aceasta, se defineşte vectorul **v**, care conține coeficienții polinomului (începând cu termenul liber pe prima poziție), după care se aplică funcția **polyroots(v)** şi rezultă rădăcinile polinomului **p(x)**.

Aplicație:

Fie polinomul: $p(x) := x^3 - 10 \cdot x + 2$.

Pentru determinarea rădăcinilor se defineşte vectorul **v** care conține coeficienții polinomului **p**. Dacă nu există toți coeficienții, în locurile rămase libere se vor completa cu zerouri.

Definirea vectorului **v** se poate face atât direct, prin crearea vectorului şi identificarea componentelor acestora, dar şi prin instrumentul *Symbolic*.

Pentru aceasta, din instrumentul *Symbolic*, utilizând cuvântul rezervat **coeffs**, se pot determina coeficienții polinomului, deci şi vectorul **v**.

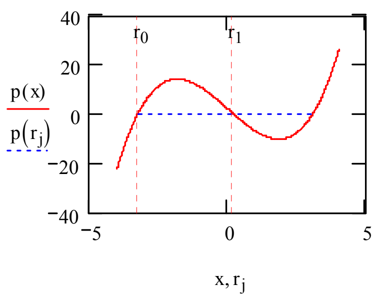
$$v := p(x) \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se inserează funcția **polyroots** şi rezultă vectorul **r** care conține rădăcinile polinomului **p**.

$$r := \text{polyroots}(v)$$

$$r^T = (-3.258 \;\; 0.201 \;\; 3.057)$$

Reprezentând grafic polinomul **p(x)**, pe intervalul de variație al rădăcinilor, se poate evidenția şi posibilitatea determinării direct, de pe grafic, a rădăcinilor polinomului, ca în figura alăturată.



2.4. Ecuaţii transcendente

Pentru rezolvarea ecuaţiilor transcendente de forma **f(x)=0**, se utilizează funcţia definită **root**. Funcţia **root(f(var1,var2,...),var1,[a,b])** determină valoarea variabilei **var1** pentru care funcţia **f** este egală cu **zero**. Dacă se specifică valorile **a** şi **b**, funcţia **root** determină valoarea variabilei **var1** în intervalul **[a,b]**. Altfel, variabila **var1** trebuie să fie definită, cu o valoare posibilă, înainte de apelarea funcţiei **root**. Când valoarea posibilă este definită, funcţia **root** utilizează metoda *Secantei* sau *Mueller*; în cazul în care funcţia **root** defineşte un interval se utilizează metoda *Ridder* sau *Brent*.

Argumentele funcţiei **root** sunt:

• **f** este funcţie scalară cu oricâte variabile;

• **var1** este variabila scalară, găsită în f, în raport cu care se determină rădăcina;

• **a**, **b** (opţional) sunt numere reale, **a<b**, şi reprezintă marginile intervalului în care se presupune că este rădăcina. Dacă rădăcina se află între aceste valori, atunci **f(a)** şi **f(b)** trebuie să fie de semne diferite.

Pentru determinarea valorii presupuse a rădăcinii, necesare la aplicarea funcţiei **root**, se reprezintă grafic funcţia **f(x)** şi se determină valoarea lui **x** pentru care funcţia **f** se anulează; cu această valoare se iniţializează algoritmul pentru determinarea soluţiei ecuaţiei.

Funcţia **root** rezolvă o ecuaţie pentru o necunoscută. Pentru a rezolva mai multe ecuaţii simultan, se utilizează funcţiile **Find** sau **Minerr**.

Aplicaţie:

Fie funcţia de intrare:

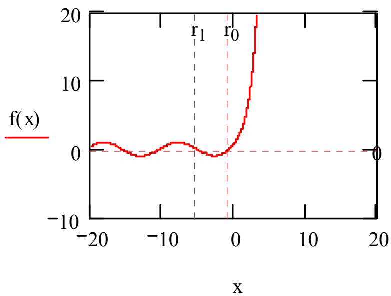
$$f(x) := \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{5.2}\right) + 0.84 \cdot e^x$$

Se introduce valoarea presupusă a soluţiei şi se modifică aceasta până când rezolvarea este convergentă în apropiere. Apoi, se determină rădăcina ecuaţiei prin utilizarea funcţiei **root**.

$x := -1$

$r_0 := \mathrm{root}(f(x), x)$

$r_0 = -0.707$



Dacă se defineşte un interval în care se presupune că se găseşte rădăcina, se obține:

$r_1 := \mathrm{root}(f(x), x, -6, -2)$

$r_1 = -5.192$

3. Chestiuni de studiat

3.1. Să se rezolve următoarele sisteme liniare:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}+1}{3}\cdot x+\sqrt{3}\cdot y+\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}\cdot z=1 \\ x-\dfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot y-\sqrt{e^{\pi}}\cdot z=e \\ \sqrt{11}\cdot y+\sqrt[3]{7}\cdot x+4\cdot z=0 \end{cases};$$

$$2)\ \begin{cases} 3\cdot x+2\cdot y-7\cdot z+t=2 \\ -2\cdot x+4\cdot z-2\cdot t+y=1 \\ -x+3\cdot t-2\cdot y+z=-1 \\ 2\cdot t-y+3\cdot x-4\cdot z=-3 \end{cases};$$

$$3)\ \begin{cases} 2.1\cdot u-4.5\cdot v-2\cdot t=19.07 \\ 3\cdot v-2.7\cdot u+5.2\cdot t=2.31 \\ 7\cdot t-2.7\cdot v+1.7\cdot u=0.35 \end{cases};$$

$$4)\ \begin{cases} \dfrac{2\cdot\pi}{3}\cdot\alpha-\dfrac{7\cdot\pi}{2}\cdot\beta-3\cdot\pi\cdot\gamma=-\pi \\ \dfrac{5\cdot\pi}{3}\cdot\beta+\pi\cdot\alpha-2\cdot\gamma=\dfrac{2\cdot\pi}{5} \\ \dfrac{\pi}{2}\cdot\gamma-2\cdot\alpha+\dfrac{2\cdot\pi}{5}\cdot\beta=0 \end{cases}.$$

3.2. Să se rezolve următoarele sisteme neliniare:

1) $\begin{cases} \tan(x\cdot y)=x^2 \\ 0.5\cdot x^2+2\cdot y^2=1 \end{cases}$, în apropierea soluției $x := 0.2, y := -0.9$.

2) $\begin{cases} u^2+v^2=6 \\ u+v=2 \end{cases}$, în apropierea soluției $u:=2;\ v:=1$,

şi în apropierea soluției $u:=1;\ v:=1$.

3.3. Să se determine rădăcinile pentru următoarele polinoame:

1) $p(x):=7\cdot x^5+3\cdot x^4-11\cdot x^3+8\cdot x^2+0.4\cdot x-0.9$;

2) $q(x):=7\cdot x^4+11\cdot x^3+3\cdot x^2+4\cdot x-9$;

3) $r(x):=x^3+(3+2i)\cdot x^2+(-4+6i)\cdot x-8i$;

4) $s(x):=x^5-2\cdot x^4+\sqrt{5}\cdot x^3+20\cdot x^2-8\cdot x+3$;

5) $t(x):=-\sqrt{3}i\cdot x^4+2i\cdot x^3+4x^2+1$.

3.4. Să se rezolve următoarele ecuații transcendente:

1) $\cos(x)=\dfrac{x}{2}$;

2) $x^2+\ln(x)=0$;

3) $x^2-e^x=0$.

4. Modul de lucru

4.1. Pentru rezolvarea sistemelor liniare se parcurg etapele prezentate în §2.1. În continuare, se exemplifică rezolvarea pentru primul sistem de la §3.1.

$$A := \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}+1}{3} & \sqrt{3} & \dfrac{3}{\sqrt[3]{5}} \\ 1 & \dfrac{-1}{\sqrt{7}} & -\sqrt{e^{\pi}} \\ \sqrt[3]{7} & \sqrt{11} & 4 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x := \mathrm{lsolve}(A, b)$$

$$x = \begin{pmatrix} -2.749 \\ 3.266 \\ -1.393 \end{pmatrix}$$

4.2. Pentru rezolvarea sistemelor neliniare se procedează conform §2.2:
Se defineşte soluția inițială, se scrie cuvântul rezervat **Given** şi apoi ecuațiile, cu semnul *egal Boolean* între termeni, după care se aplică funcția **Find**:

$x := 0.2;\ y := -0.9$

Given

$$\begin{cases} \tan(x \cdot y) = x^2 \\ 0.5 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 = 1 \end{cases}$$

$$Find(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.707 \end{bmatrix}$$

4.3. Pentru determinarea rădăcinilor unui polinom se procedează conform §2.3. Aplicând indicațiile se determină vectorul **a**, care conține coeficienții polinomul **p(x)** şi apoi rădăcinile, prin utilizarea funcției **polyroots**:

$$a := \begin{pmatrix} -0.9 \\ 0.4 \\ 8 \\ -11 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(a) = \begin{pmatrix} -1.711 \\ -0.299 \\ 0.405 \\ 0.588 - 0.523i \\ 0.588 + 0.523i \end{pmatrix}$$

4.4. Pentru rezolvarea ecuațiilor transcendente se procedează conform §2.4. Exemplificând pentru prima ecuație, se obține:

$$f(x) := \cos(x) - \frac{x}{2}$$

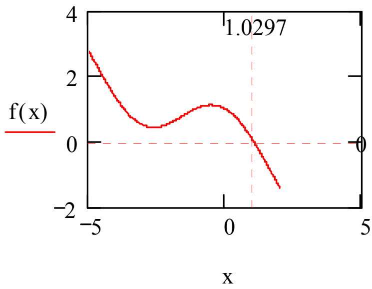
$$x := -5, -5 + 0.01 .. 2$$

$x := 1.0297$

$\mathrm{root}(f(x), x) = 1.029867$

sau, definind un interval, se obține:

$\mathrm{root}(f(y), y, 0, 5) = 1.03$



5. Conținutul referatului

Referatul trebuie să conțină:

- Titlul și scopul lucrării
- Noțiuni teoretice
- Chestiuni de studiat
- Rezultatele obținute și observații personale.